UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 89-107

Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje

Mauro Mira López, Julia Valls González, Salvador Llinares

Fecha de recepción: 25/08/2011
Fecha de aceptación: 14/06/2013

Resumen	El objetivo del estudio fue identificar características de la construcción del significado de límite de una función en estudiantes de bachillerato (16-17 años). Se diseñó un experimento de enseñanza utilizando una descomposición genética (APOE) del concepto de límite de una función integrando recursos informáticos. Se usó el constructo “Reflexión sobre la Relación Actividad-Efecto” (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004) como una particularización de la abstracción reflexiva para identificar factores que configuran la Trayectoria de Aprendizaje. Los resultados indican que la trayectoria está determinada por la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en diferentes tipos de funciones. **Palabras clave**: Límite de una función, experimento enseñanza, recursos tecnológicos.
Abstract	The goal of this study is to identify characteristics of post-secondary students’ construction of meaning of function limit. We design a teaching experiment drew upon a genetic decomposition (APOS) of the concept of limit of function integrating technologics resources. Using “reflection on relation activity-effect” construct (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004) derivated from Piaget’s reflective abstraction notion we identify factors in the learning trajectory arose. The findings indicate that the different learning trajectories that emerge were determined by how coordination between approximations in rage and domain were set in different functions. **Keywords**: Function limit, teaching experiment, technologics resources.
Resumo	O objetivo deste estudo é identificar as características da construção do significado de limite de uma função no pós-secundário estudantes em obrigatória (16-17 anos). Nós projetamos uma experiência de ensino, considerando uma análise genética (APOS) do conceito de limite de uma função com a integração de recursos de tecnologia. Usamos el constructo “reflexão sobre a atividade-efeito” (Simon, Tzur, Heinz e Kinzel, 2004) como uma particularização da abstração reflexiva (Piaget) para identificar os fatores que moldam a trajetória de aprendizagem. Os resultados indicam que o trajectória de aprendizagem é determinada pela coordenação das tendencias in intervalos em diferentes tipos de funções. **Palavras-chave:** Limite de uma função, experiência de ensino, recursos de tecnologia.

1. Introducción

El aprendizaje del concepto de límite plantea dificultades a los estudiantes tal como confirman desde hace algún tiempo las investigaciones (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996; Sierra, 2000; Blázquez y Ortega, 2001; Elia, Gagatsssi, Panaoura, Zachariades & Zoulinaki, 2009; Valls, Pons y Llinares, 2011). Los resultados de estas investigaciones indican que el concepto de límite de una función es difícil de comprender. En particular, Orton (1980) señala que los estudiantes tienen dificultades en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada y en la utilización apropiada de las representaciones gráficas, mientras que Cornu (1991) indica que estas dificultades están vinculadas a que el concepto de límite es uno de los primeros en el que las matemáticas no están restringidas a un cómputo finito.

Artigue (1995) organizan las dificultades de los estudiantes con las ideas del cálculo en tres grupos, (a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, (b) la conceptualización y formalización de la noción de límite y a su tratamiento en la enseñanza, y (c) la distancia entre el pensamiento analítico y el algebraico. En relación a la conceptualización y formalización de la noción de límite y a su tratamiento en la enseñanza, Hardy (2009) indica que hay diferencias entre las percepciones de los profesores en relación al concepto de límite generadas desde las praxeologías puestas en funcionamiento en las instituciones de enseñanza y las percepciones de los estudiantes generadas a partir de las estrategias y creadas de manera espontánea para superar los exámenes. Finalmente, la influencia de los diferentes modos de representación en el desarrollo de la comprensión del significado de límite de una función muestra la distancia entre el pensamiento analítico y el algebraico en el aprendizaje de este concepto (Blázquez y Ortega, 2000; Elia et al., 2009; Moru, 2009).

En relación a la complejidad matemática del concepto de límite Freudenthal (1983), a través del análisis fenomenológico de este concepto, pone al descubierto la presencia de dos fenómenos específicos de diferente naturaleza, los fenómenos de Aproximación Intuitiva (AI) y los de Aproximación doble intuitiva (ADI). La aproximación intuitiva remite a la evolución de las variables dependiente e independiente en el caso de funciones reales de variable real con límite finito en un punto. El alumno al iniciar su aprendizaje cree que hay dos aproximaciones, la de la sucesión de valores de la variable independiente hacia un valor y la de la sucesión de valores de la variable dependiente hacia el límite; y es consciente, o no, de la conexión que la función f establece entre ambas sucesiones. Los fenómenos de Retroalimentación se manifiestan al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función (ε-δ para funciones). Cada retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el ε en el eje de ordenadas hay que coordinar con un entorno en el eje de abscisas para determinar el correspondiente δ asociado, y comprobar que las imágenes de valores correspondientes al eje de abscisas pertenecen al entorno considerado. Este fenómeno es puesto de relieve cuando se estudia el proceso de construcción del significado (Swinyard, 2011). En particular, Kidron (2010), en un estudio de casos sobre el proceso de construcción del significado de la idea de límite en la definición de la asíntota horizontal, encontró que los estudiantes, en su esfuerzo por realizar las diferentes tareas propuestas, se encontraban en una situación de conflicto entre su imagen del concepto de la asíntota horizontal y la definición del concepto. Este conflicto ponía de manifiesto la dificultad en dotar de sentido a la aproximación doble intuitiva y el papel desempeñado por el razonamiento algebraico y analítico de manera complementaria al razonamiento numérico para revisar su imagen del concepto visto desde la perspectiva teórica de la abstracción en contexto (Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, 2001). Por otra parte, Prezenioslo (2004), al estudiar las distintas concepciones sobre el concepto de límite de los estudiantes, indica que la más eficiente es la que se centra en la vecindad y que la concepción de límite de una función que se apoya en considerar la aproximación de sus valores es más eficiente que la idea basada en la aproximación de puntos de la gráfica. Además, Tall y Vinner (1981) indican que el proceso dinámico, es decir, cuando x se aproxima hacia "a" entonces f(x) se aproxima al límite sin alcanzarlo, entra en conflicto con la definición formal del límite, puesto que prevalece sobre ésta.

Estas investigaciones han puesto de manifiesto que en la coordinación entre las aproximaciones en el eje de abscisas y el eje de ordenadas los diferentes modos de representación desempeñan un papel relevante para poder explicar la relación entre la aproximación métrica y dinámica en el proceso de construcción del significado de límite. En particular, Duval (1998) señala que para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno sólo no se obtiene su comprensión. Esta perspectiva ha puesto de manifiesto el papel primordial de los diferentes modos de representación y de las traslaciones y conversiones entre ellos para comprender los procesos de construcción de los significados del concepto de límite por parte de los estudiantes. En particular, Elia y sus colaboradores (2009) ha investigado los obstáculos epistemológicos que los estudiantes de matemáticas encuentran en el límite de funciones en diferentes modos de representación. Sus resultados indican que los estudiantes que habían construido una comprensión conceptual de límite fueron los que más conversiones entre límites algebraicos y geométricos lograron y al revés. Una consecuencia de estos resultados sobre las dificultades de los estudiantes con el significado del límite es la generación de implicaciones para la enseñanza que intentan superarlos (Camacho y Aguirre, 2001; Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini, 2007; Contreras y García, 2008). De esta manera, Fernández (2000) propone sistemas didácticos para trabajar el concepto de límite a partir de programas informáticos específicos tales como el Derive. Sin embargo, Monagham, Sun y Tall (1994) indican que el uso de la tecnología no garantiza que los estudiantes puedan superar las dificultades con el concepto de límite de una función. Esta situación plantea interrogantes sobre cuáles deben ser las características de las secuencias de enseñanza que tengan en cuenta la información reunida hasta estos momentos por las investigaciones sobre el aprendizaje del concepto de límite.

La investigación presentada aquí tiene como objetivo identificar

- características del proceso de construcción del significado del concepto de límite de una función, y
- factores de las secuencias de enseñanza que parecen influir en ese proceso de construcción.

El contexto fue un experimento de enseñanza organizado considerando una trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de límite. El experimento de enseñanza fue diseñado usando tareas que integraban recursos tecnológicos y considerando la concepción dinámica y métrica de límite (Blázquez y Ortega, 2002). La concepción dinámica de límite (figura 1) entendida como

- Sea "f" una función y "x" un número real
- "x" se aproxima al número "a"
- "f(x)" se aproxima a "L" cuando "x" se aproxima al número "a", sus imágenes "f(x)" se aproxima a "L"

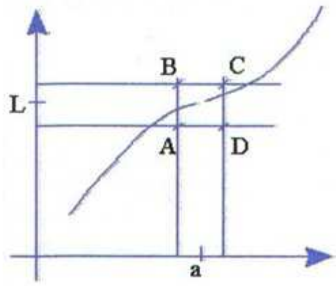


Figura 1. Representación gráfica de la concepción dinámica de límite: aproximación y coordinación
Fuente: Bláquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006

Y la concepción métrica de límite (figura 2) entendida como:

- Sea "f" una función y "x" un número real.
- Si se puede encontrar para cada ocasión un "x" suficientemente cerca de "a" tal que el valor de "f(x)" sea tan próximo a "L" como se desee" entonces decimos que existe límite de la función, L, en el punto a, se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 : \forall x \left(0 < |x - a| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

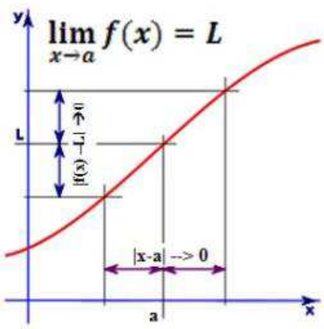


Figura 2. Representación gráfica de la concepción métrica de límite: cuantificación

2. Marco teórico

La perspectiva teórica adoptada procede de una particularización de la idea de Abstracción Reflexiva, entendida como las acciones y operaciones del sujeto y los esquemas que le conduce a construir conocimiento (Piaget y García, 1982) realizada por Simon y Tzur (2004). Estos autores señalan que las acciones de los estudiantes producen diferentes efectos que pueden ser considerados por el estudiante en el desarrollo de procesos de abstracción. Sin embargo, los estudiantes deben centrarse únicamente en aquellos efectos que son relevantes para el desarrollo del concepto matemático implicado. Simon y Tzur denominan a este proceso Reflexión sobre la Relación Actividad-Efecto para dar cuenta de cómo funciona el proceso de Abstracción Reflexiva. El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto consiste en dos tipos de comparaciones: (a) entre el objetivo del estudiante y los efectos de la actividad, lo que lleva a una clasificación de los registros actividad-efecto y, (b) entre las diferentes situaciones que dan lugar a cada tipo de registros actividad-efecto, lo que lleva a abstraer la relación actividad-efecto como una regularidad anticipada y razonada (Tzur, 2007).

La reflexión sobre la relación actividad-efecto comienza cuando el estudiante debe resolver una determinada tarea. La demanda de resolución genera un objetivo para el estudiante (Objetivo del estudiante) que determina una serie de acciones mentales que dependen de su conocimiento previo. Para poder alcanzar su objetivo, el estudiante realiza alguna actividad o secuencia de actividades (Actividad dirigida por el objetivo) proporcionando la posibilidad de prestar atención a los efectos de la actividad realizada (Efecto de la actividad) en relación con lo que pretende conseguir. En este proceso de observación de los efectos de la actividad, el estudiante crea registros mentales (Registros de la relación Actividad-Efecto). En función del efecto obtenido y de la necesidad de alcanzar su objetivo, el estudiante realiza ajustes para aproximarse al logro del objetivo. Estas variaciones son intencionadas. Al llevar a cabo una nueva actividad (o un ajuste de la actividad inicial), ésta produce un nuevo efecto. Así, los registros mentales en los que se relaciona cada actividad con el efecto que produce son clasificados y comparados.

Esta comparación de registros mentales lleva a la identificación de estructuras y/o patrones en la relación entre actividad y efecto (Regularidad en la relación actividad-efecto). De esta forma la reflexión lleva al estudiante a la Abstracción Reflexiva de regularidades en la relación actividad-efecto. La abstracción se produce al identificar regularidades en el conjunto de relaciones registradas y es la base del nuevo concepto o estructura que forma parte del proceso de resolución de la tarea propuesta. Además, haber abstraído la regularidad en la relación actividad-efecto al realizar la comparación de las diferentes situaciones que la generaron permite al estudiante anticipar los efectos de nuevas actividades sin necesidad de llevarlas a cabo. Tzur y Simon, desde la noción de Abstracción Reflexiva de Piaget, asumen que estos procesos mentales de los estudiantes son elementos constituyentes de la comprensión de un objeto que involucra 2 fases:

- La Fase Participativa, en la que los estudiantes desarrollan diferentes actividades guiados por el objetivo de resolver la tarea y generan diferentes efectos (resultados de la actividad). La reflexión inicial sobre la relación entre la actividad y el efecto producido permite generar ideas pertinentes para la resolución de la tarea que inicialmente sólo está disponible en el contexto del tipo de tarea propuesta. Por ejemplo, el estudiante al evaluar el valor de una función *f* en puntos cercanos o igual a *"a"* puede generar una idea sobre la relación entre la cercanía de los puntos a *a* y el comportamiento de los valores de la función. Esta idea inicial es considerada como una anticipación provisional (en el sentido de no duradera) de la regularidad en la relación actividad-efecto (al evaluar *f* en un solo proceso en el que *f(x)* se acerca a *L* como *x* a *"a"*).

- La Fase de Anticipación, en la que ante una determinada tarea cuya resolución involucra el uso por parte de los estudiantes de un concepto matemático y este solo tiene que considerar pertinente el uso del concepto matemático en la resolución de esta tarea. El estudiante puede hacer uso del concepto de manera adecuada independientemente del contexto o tarea. La distinción entre las dos fases surge de la observación del fracaso de los estudiantes en el uso de concepciones matemáticas que habían utilizado con éxito en ocasiones anteriores.

2.1. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Esta forma de entender el desarrollo de las estructuras mentales por parte de los estudiantes y el aprendizaje conceptual proporciona referencias para pensar en cómo una secuencia de tareas puede promover el aprendizaje. Es decir, establecer de manera explícita relaciones entre las características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en los estudiantes y las características de secuencias de enseñanza (identificar objetivos de aprendizaje, definir secuencias de tareas y contribuir a una evaluación detallada de las comprensiones matemáticas de los estudiantes) (Tzur, 2007; Simon y Tzur, 2004). Desde esta hipótesis inicial, se han empezado a considerar 3 tipos de tareas que pueden ayudar a los estudiantes en la construcción de un nuevo concepto entendiendo este proceso de construcción desde la perspectiva de la reflexión sobre la relación actividad-efecto (Tzur, 1999):

- Tareas iniciales: que pueden ser realizadas por los estudiantes haciendo uso de sus conocimientos previos. Estas tareas pueden usarse para que el estudiante lleve a cabo ciertas experiencias que posteriormente se convertirán en material para la reflexión y la abstracción de regularidades en la relación actividad-efecto.
- Tareas de reflexión: a partir de las actividades realizadas por los estudiantes al resolver tareas iniciales, el profesor puede proponer tareas de reflexión que dirigen a los estudiantes a centrar su atención en los registros actividad-efecto. El objetivo es que el estudiante reflexione sobre dicha relación para generar la abstracción de regularidades en la relación actividad-efecto.
- Tareas de anticipación: para llevar a cabo estas tareas es necesario hacer uso de una regularidad en la relación actividad-efecto, de forma que las tareas de anticipación sitúan al estudiante ante la necesidad de obtener información a partir del conjunto de registros. Para realizarlas es necesario que se haya producido la abstracción de la regularidad en la relación actividad-efecto.

Las tareas iniciales se usan para promover la creación y reconocimiento de ciertas experiencias, las tareas reflexivas para dirigir la atención del estudiante a la relación actividad-efecto, y las tareas de anticipación para provocar la abstracción de regularidades. En este contexto, un concepto es considerado como una relación mental dinámica entre una actividad y sus efectos.

2.2. Preguntas de investigación

Considerando la problemática de investigación inicialmente descrita, los objetivos generados y la perspectiva teórica adoptada, las preguntas que nos planteamos fueron:

- ¿Cómo se genera la coordinación entre aproximaciones en la construcción del significado del límite de una función?
- ¿Cómo identifican los estudiantes las relaciones de actividad-efecto desde las diferentes coordinaciones?

3. Método

3.1. Participantes y diseño del experimento de enseñanza

En este experimento de enseñanza participaron ocho estudiantes (cinco chicos y tres chicas) de 1º de Bachillerato de Ciencias (16 y 17 años). Estos estudiantes no habían recibido ninguna enseñanza previa en relación al concepto de límite de una función. Se diseñó una secuencia de enseñanza de 10 clases de 50 minutos. La primera clase tenía como objetivo introducir a los estudiantes al programa DERIVE y las otras nueve clases se organizaron en 3 módulos de 3 clases cada uno. Las tareas en estos módulos tenían como objetivo recordar aspectos relativos a las funciones (módulo 2), el desarrollo del significado de la idea de tendencias y aproximación (módulo 3) y el significado de límite (módulo 4) e integraban los modos algebraico, gráfico y numérico. Las tareas eran de tres tipos: (a) iniciales, (b) de reflexión y, (c) de anticipación. En cada bloque las tareas propuestas debían ser resueltas por los estudiantes en parejas. El módulo 2 (Función) estaba compuesto por 13 tareas, el módulo 3 (Tendencias y aproximaciones) por 6 tareas, y el módulo 4 (Límite por aproximación métrica) por 2 tareas.

En la primera clase los estudiantes se familiarizaron con los programas informáticos, Derive 6.0- comandos e iconos más usuales- y Camstudio- manejo del programa de grabación oral y de pantalla. La secuencia de tareas propuestas en los tres módulos (funciones, tendencias y límite) tenía en cuenta los aspectos de la trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de límite desde las perspectivas dinámica y métrica conjeturada previamente:

1. Aproximación a un punto “a”.
2. Coordinación entre f(x) se acerca a L como x se acerca a “a”.
3. Límite como cuantificación de distancias métricas que tienden a cero.

Las trece tareas que conformaban el módulo 2 (funciones) estaban organizadas según el esquema descrito en la figura 3. Estas tareas se formularon teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones de Blázquez y Ortega (2002) y Robinet (1983) en el sentido de utilizar funciones sencillas, parábolas, hipérbolas, etc., más adecuadas para estas edades, intentando coordinar los valores de “x” e “y”. El objetivo de este módulo fue recordar aspectos relativos a la idea de función como un paso previo al proceso de construcción del significado de límite de una función.

Figura 3. Contenido Módulo 2 (Funciones)

En el módulo 3 (Tendencias y aproximaciones) las seis tareas propuestas estaban centradas en tendencias finitas e infinitas (figura 4). En particular, sobre tendencias laterales finitas en representación algebraica y gráfica. Los objetivos de este módulo fueron:

- Generar contextos para determinar el nivel de aceptación de la existencia de límite.
- Discriminar los límites laterales.
- Establecer relaciones entre la existencia del límite a la de los límites laterales.

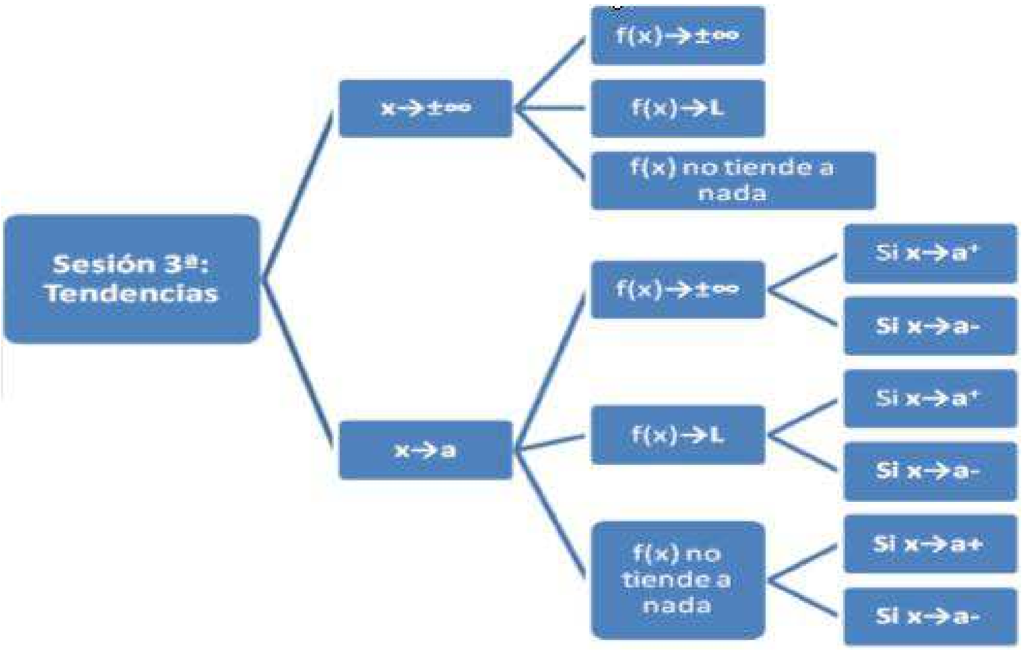


Figura 4. Contenido Módulo 3 (Tendencias y aproximaciones)

Por último, en el módulo 4, se introdujo la idea de límite de una función como aproximación métrica. El objetivo de las tareas de este módulo era apoyar a los estudiantes en la traslación desde la fase de participación a la fase de anticipación en la construcción del significado de límite de una función. Esta transición es clave en el proceso de construcción del significado del límite permitiéndonos identificar las dificultades que podrían surgir en la idea de límite a través de una función en modo de representación gráfica y que tiene un límite lateral finito y otro infinito, o a través de la tabla de una función con límites laterales distintos. El contenido del módulo 4 (límite) se muestra en la figura 5.

Figura 5. Contenido Módulo 4 (Límite por aproximación métrica: LAM)

La tabla 1 recoge ejemplos de tareas tipo propuestas en cada uno de los módulos diseñados.

Tabla 1. Algunas de las tareas propuestas en los módulos diseñados

	Ejemplo	Objetivo
Módulo 2: Funciones	*Tareas F-6.Dibujad las funciones a. f(x) = 3x b. g(x) = 3x2 + 1 (a partir del comando gráfico)*	*Analizar cómo los estudiantes relacionan el dominio y el recorrido de una función intuitiva o formalmente*
Módulo 3: Tendencias	*Tareas T-1 y T-2.-Calcula los siguientes límites y explícalos razonadamente antes de dibujarlos. Compruébalos con el ordenador, con una tabla, o desde el cursor y su gráfica.* *a)* $\lim_{x\to -4}\frac{-1}{x+4}$ *b)* $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x+3}$	*Analizar cómo los estudiantes coordinan las aproximaciones a "x" con las respectivas tendencias de "y"*
Módulo 4: Limites	Tarea L-1. Haced una tabla de |x-a| y |f(x)-L| para ver sus tendencias, en x=3 Para ello buscad números "a" próximo a 3, para la función: f(x) = x2 – 2 Tarea L-2. Haced lo mismo con la siguiente función y concluir si hay límite y por qué $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \; si \; x < 3 \\ 2x \; si \; x \geq 3 \end{cases}$	• Analizar si los estudiantes son capaces de observar que las distancias tienden a cero. • Analizar si los estudiantes son capaces de concluir que el hecho de qué las distancia tiendan a cero o no implica la existencia o no de límite de la función en el punto x =3

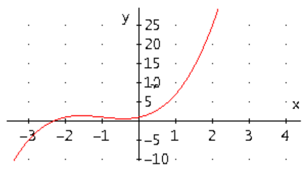
Los estudiantes realizaron las tareas por parejas en un aula de informática. Para recoger sus interacciones durante la resolución de las diferentes tareas usamos el programa Cam-Studio (http://camstudio.es/) que es un software libre que permite realizar la grabación de todo lo que sucede en el escritorio, grabando tanto la pantalla completa, como ventanas o zonas definidas, así como el audio que esté activo en ese momento, generando un fichero en el formato de vídeo AVI y utilizando el generador de SWF en formato Flash creando un fichero de peso reducido y con soporte para Streaming de vídeo sobre flash.

3.2. Datos

Los datos de esta investigación fueron las transcripciciones de las grabaciones orales (tabla 2) y de pantalla del ordenador obtenidas desde el programa Camstudio (figura 6) de cada una de las parejas participantes que fueron codificadas por las iniciales de sus nombres.

También se dispuso para esta investigación de las respuestas a un cuestionario de 9 tareas en los que se hacía referencia a aspectos de la concepción de aproximación dinámica y métrica de límite en diferentes representaciones: numérica (N), gráfica (G), tabla (T), algebraica (A), lenguaje formal (LF), lenguaje natural (LN). Los participantes en el experimento de enseñanza respondieron a este cuestionario al finalizar todas las sesiones y con el objetivo de establecer la comprensión que habían adquirido del concepto de límite como un indicador complementario de la información generada sobre el proceso de construcción.

Tabla 2. Transcripción de la pareja K-R a las respuestas orales de la tarea 1 del módulo 2

Sesión 3: 02-12-09 Tendencias	
Tarea T-1.- Dibujad la siguiente función y comprobad con el cursor y con el zoom que le ocurre a la "y" cuando la "x" aumenta mucho, es decir, ¿hacia dónde- a qué valor- se acerca la función cuando x aumenta mucho, tiene un valor muy grande? $y = x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$ 	
L1	R: bueno, vamos a dibujar una función, ehhhh…
L2	K: Mauro puedes ir un poco (no se oye bien) que veamos la otra.
L3	K: un poco para que veamos la otra.
L4	K: ¡ya!
L5	R: 2x más 1
L6	R: Bueno, pues vamos a dibujar la función.
L7	R: ¿es una pregunta? (a K)
L8	R: Vamos a ir viendo
L9	R: vamos a ver….

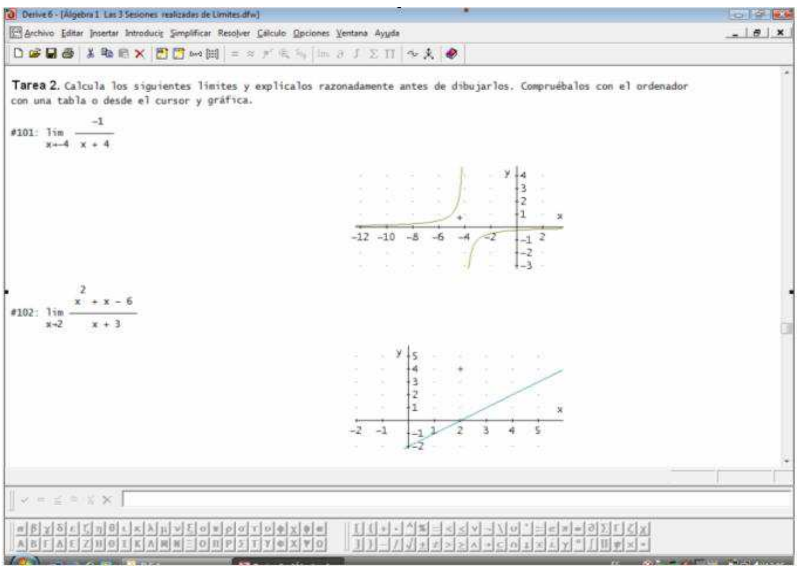


Figura 6. Pantalla del ordenador de la respuesta dada por la pareja R-K a la Tarea 2 del módulo 3

3.3. Análisis

El análisis de los datos se realizó en tres etapas:

Etapa 1. En esta etapa se hizo un análisis pre-analítico a partir de las transcripciones realizadas y de las verbalizaciones de los estudiantes y de sus interacciones al resolver las tareas. Este análisis pre-analítico tenía como objetivo identificar evidencias de relaciones entre la actividad-efecto en el contexto de la coordinación de las aproximaciones y de las diferencias en el dominio y rango.

Etapa 2. En esta etapa se trató de caracterizar la fase de participación a partir de la lectura conjunta de todos los comentarios pre-analíticos.

Etapa 3. En esta última etapa se trató de establecer si los estudiantes hacían uso del concepto al responder correctamente a tareas donde se les pedía conjeturar el límite de una función desde su expresión algebraica y gráfica, es decir, dando evidencias de encontrarse en la Fase de anticipación.

4. Resultados

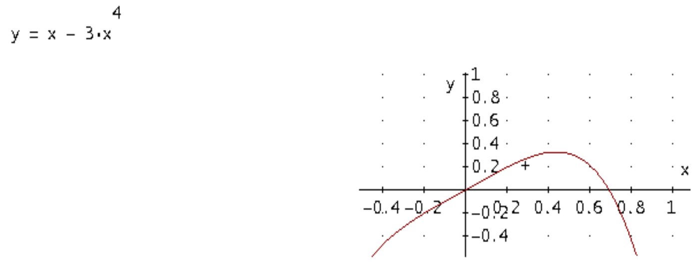
En este informe presentamos las características del proceso de construcción del significado de la idea de límite de una función en un entorno de aprendizaje que favorece la complementariedad entre las concepciones dinámicas y métricas y las relaciones entre los diferentes modos de representación usando evidencias procedentes de una de las parejas participantes (R-K). El proceso de construcción de los significados se describe considerando las fases participativas y anticipativa puestas de manifiesto por la reflexión sobre la relación actividad-efecto generadas durante la resolución de las diferentes tareas. Los resultados se muestran en función de las relaciones entre la actividad-efecto y las fases de transformación conceptual.

4.1. Relaciones entre la actividad-efecto

Hemos identificado evidencias de relaciones entre la actividad-efecto, en el contexto de la coordinación de las aproximaciones y de las diferencias en el dominio y rango de funciones. Por ejemplo, en el desarrollo de las tareas del módulo 2 sobre la idea de función, al resolver la tarea T.2 (tabla 2), centrada en el significado de la idea de función como relación entre variables, los estudiantes dibujan la gráfica de la función y prestan atención al efecto sobre la función de la modificación de los valores de la x. El diálogo entre los dos estudiantes (líneas L2 a la L5 de la tabla 2) pone de manifiesto la manera en la que el discurso sobre las representaciones gráficas generadas indica cómo estaban estableciendo la relación entre la acción de mover el cursor (cambio de los valores de la x) y el efecto producido en el comportamiento de la función (efecto de la acción). Esta actividad permite asumir que los estudiantes estaban en condiciones de crear registros mentales de lo que estaba sucediendo mientras resolvían la tarea en relación a la tendencia de la función (línea L10 de la tabla 3).

Tabla 3. Ejemplo de relación entre la actividad-efecto

Tarea T.2.- Dibujad la siguiente función y comprobad con el cursor y con el zoom que le ocurre a la “y” cuando la “x” aumenta mucho, es decir, ¿hacia dónde- a qué valor- se acerca la función cuando x aumenta mucho, tiene un valor muy grande?



L1	R: tiende (R y K murmullan pero apenas se oye)
L2	R: en la 2ª gráfica cuando “x” aumenta mucho, la “y” disminuye.
L3	K: si la “x”…
L4	R: si la “x” aum… a ver , si la “x” está aumentando la “y” aumenta, pero llega un punto que la y un tal
L5	K: disminuye
L6	R: entonces, cuando la “x” aumenta mucho
L7	K: la “y” disminuye
L8	R: la “y” disminuye… ahí mide tanto (no se oye bien)...tómatelo por F5 (no se oye bien)
L9	K: no, pero por (no se oye bien)
L10	R: más o menos un poco antes de 0,5 tiende a disminuir

4.2. Fases de transformación conceptual

Los estudiantes que forman la pareja R-K solo son capaces de adelantarse a los resultados desde la perspectiva de la conceptualización dinámica de límite, cuando están experimentando aproximaciones a un punto finito e infinito en funciones continuas a partir de sus representaciones gráficas (tabla 4).

Tabla 4. Evidencia de pertenencia a la “fase de participación” de la pareja R-K

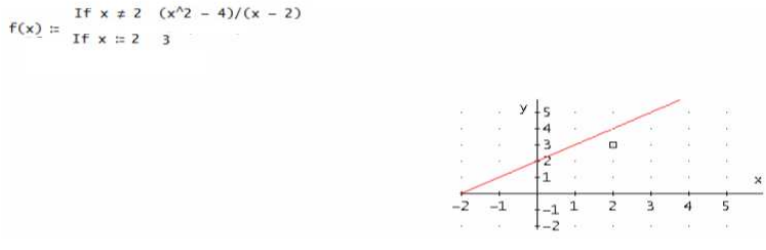
Tarea T-5.- Halla la tendencia de la función $y = \sqrt{x}$ cuando “x” se acerca a 1

L1	R: cuando x se acerca a 1 por la derecha, la “y” disminuye y, y…
L2	K: y cuando…
L3	R: y cuando se acerca por la izquierda la “y” aumenta, la “y” aumenta hasta 1, y la “y”, o sea por la derecha la “y” disminuye hasta 1 y por la izquierda la “y” aumenta hasta 1.

Sin embargo, en funciones definidas a trozos no fueron capaces de adelantarse a los resultados ya que en estos casos, por ejemplo, en la tarea T.6 asocian el límite con el valor de la función en un punto (tabla 5). Esta evidencia indica que los estudiantes se encuentran en la fase de participación en relación a la concepción dinámica de límite al ser incapaces de usar el concepto de límite desde esta perspectiva en cualquier situación.

Tabla 5. Evidencia de no pertenencia a la “fase de anticipación” de la pareja R-K

Tarea T-6. ¿Cuál es la tendencia de la función cuando hacemos aproximaciones laterales? ¿Cuál es el valor de la función en x=2? Primero con el cursor, nos acercamos lateralmente. y luego nos hacemos una tabla.

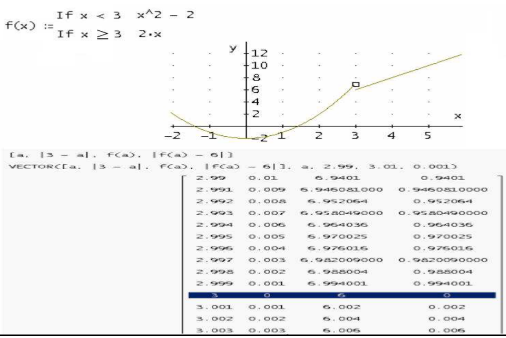


…	…
L6	K: pon la ventana, cuando "x" tiende a 2 por su izquierda, izquierda,
L7	R: "x" aumenta muy despacio
L8	K: "y" da el salto a 3 (no se oye bien). Cuando llega a 2 hay un bajón hasta 3 (leve silencio) y 2? lo normal sería que fuera 2 punto 4 (2, 4), pero en esta función el punto es (2, 3) (leve silencio) no entendemos por qué pero la función hace ese recorrido (parece que R y K hablan a la vez) (Teclean el teclado) yyyy…..cuando se acerca a dos por su derecha, "x" aumenta muy poco, va disminuyendo hasta que llega a 2 que "y" disminuye a 3. Por la izquierda… se va acercando a 4
L9	K: y justo en 4, da un salto hasta 3
L10	R: pero… da salto a 3… y por la derecha "x" se va acercando a 3, se va acercando a 4 … y da un salto (silencio)
L11	K: ¿no?
L12	R: Se supone que debería ser 4 pero en la otra opción hemos visto que era 3
L13	K: ¡claro!
L14	R: si es la misma función
L15	K: tiene que ser el mismo valor
L16	R: tiene que ser el mismo valor….
L17	K: Concluido.

Desde la conceptualización métrica de límite, estos estudiantes no coordinan las tendencias a cero de los intervalos en el dominio (|x-a|→0) y en el rango ((|f(x)-l|→0). Por ejemplo, en la tarea 4.2 (tabla 6) calculan las distancias en el dominio y en el rango adecuadamente pero no identifican que en la columna |f(a)-6|, este intervalo no tiende a 0, cuando se acercan a 3 por la izquierda, y en consecuencia no concluyen que no existe límite.

Tabla 6. Evidencia de no pertenencia a la "fase de anticipación" de la pareja R-K

Tarea 4.2. Dibuja la función $\begin{cases} x^2-2 \; si \; x<3 \\ 2x, \quad si \; x\geq 3 \end{cases}$, haz una tabla con |x-a| y |f(x)-L| para ver sus tendencias, en x=3 e indica si la función tiene límite o no.

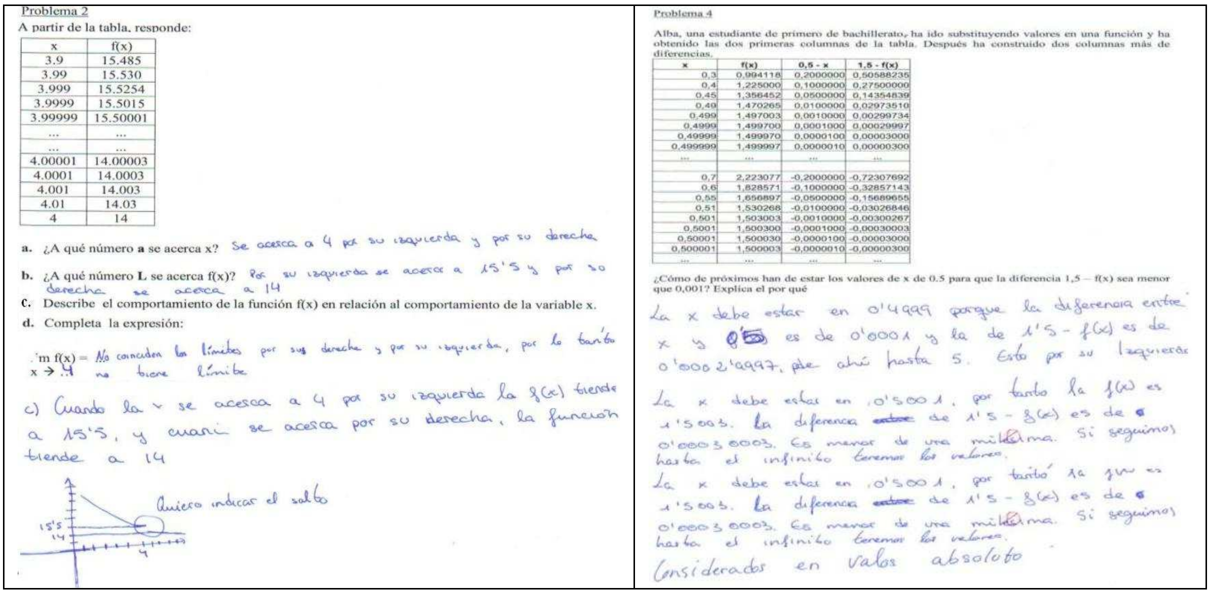


2.99	0.01	6.9401	0.9401
2.991	0.009	6.946081000	0.9460810000
2.992	0.008	6.952064	0.952064
2.993	0.007	6.958049000	0.9580490000
2.994	0.006	6.964036	0.964036
2.995	0.005	6.970025	0.970025
2.996	0.004	6.976016	0.976016
2.997	0.003	6.982009000	0.9820090000
2.998	0.002	6.988004	0.988004
2.999	0.001	6.994001	0.994001
3	0	6	0
3.001	0.001	6.002	0.002
3.002	0.002	6.004	0.004
3.003	0.003	6.006	0.006

L1	K: tenemos que poner valores de x cada vez más próximos a
L2	K: tenemos que hacer valores cada vez más próximos a "a".
L3	K: vale, ¿sabes que vamos a coger?

L4	R: Aquí no
L5	K: no, ya está
L6	R: Vamos tenemos ya valores. Vamos a salir por la izquierda
L7	K: por su derecha
L8	R: estamos viendo lo que vale a… la función tiende a seis cuando “x” vale tres
L9	K: ahora tenemos que ver la diferencia
L10	K: ahora tenemos que ver la diferencia, sí al aproximarse…a 3. Sí, si al aproximarse a 3. Esa es la distancia que hay al aproximarse por su izquierda desde su derecha, esto ya está hecho, no?, bájalo, bájalo, ahora lo hacemos por la derecha, es que aquí por la izquierda y por su derecha Por esto, no ves ,
L11	R: ahora tú, tenemos que poner el valor absoluto de las diferencias
L12	K: contando ya la función positiva, la función positiva, tres menos a, tres con 29 a tres con uno (no se oye bien)
L13	K: Vale
L14	R: ya tenemos valores en positivo (no se oye bien) para arriba, tenemos uno… que sería con seis, (le responde al profesor) sí, claro es lo que se dice, (no se oye bien) f(a) coma…….2,99
L15	K: sí... atchisssssssss (estornuda)
L16	R: Jesússs, (se queda en silencio) la diferencia , 6
L17	R: vale, en la 1ª columna podemos ver, podemos apreciar el punto de cómo acercarnos por la izquierda a 3, podemos ver la diferencia, podemos ver la tendencia de la función y comprobar el 6 es el límite de la función en el punto 3.

No obstante, Roberto uno de los componentes de la pareja R-K, al responder a las cuestiones del problema 2 del cuestionario propuesto para analizar la compresión del concepto de límite de una función, reconoce, a partir de una tabla, que no hay límite y hace una gráfica para mostrar su conclusión (figura 7). Esta forma de actuar pone de manifiesto su capacidad de coordinar las aproximaciones en el dominio y rango de la función- concepción dinámica de límite. Igualmente, en el problema 4 del cuestionario en relación a la concepción métrica del concepto de límite es capaz de ver que los intervalos |x-a| y |f(x)-L| tendían a cero, poniendo de manifiesto su capacidad de coordinarlos (figura 7).


Problema 2

A partir de la tabla, responde:

x	f(x)
3.9	15.485
3.99	15.530
3.999	15.5254
3.9999	15.5015
3.99999	15.50001
...	...
...	...
4.00001	14.00003
4.0001	14.0003
4.001	14.003
4.01	14.03
4	14

a. ¿A qué número **a** se acerca x? Se acerca a 4 por su izquierda y por su derecha

b. ¿A qué número **L** se acerca f(x)? Por su izquierda se acerca a 15'5 y por su derecha se acerca a 14

c. Describe el comportamiento de la función f(x) en relación al comportamiento de la variable x.

d. Completa la expresión:

lím f(x) = No coinciden los límites por sus derecha y por su izquierda, por lo tanto no tiene límite
x → 4

c) Cuando la x se acerca a 4 por su izquierda la f(x) tiende a 15'5, y cuando se acerca por su derecha, la función tiende a 14

Problema 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato, ha ido substituyendo valores en una función y ha obtenido las dos primeras columnas de la tabla. Después ha construido dos columnas más de diferencias.

x	f(x)	0,5 - x	1,5 - f(x)
0,3	0,994118	0,2000000	0,50588235
0,4	1,225000	0,1000000	0,27500000
0,45	1,356452	0,0500000	0,14354839
0,49	1,470265	0,0100000	0,02973510
0,499	1,497003	0,0010000	0,00299734
0,4999	1,499700	0,0001000	0,00029997
0,49999	1,499970	0,0000100	0,00003000
0,499999	1,499997	0,0000010	0,00000300
...	...	...	...
0,7	2,223077	-0,2000000	-0,72307692
0,6	1,828571	-0,1000000	-0,32857143
0,55	1,656897	-0,0500000	-0,15689655
0,51	1,530268	-0,0100000	-0,03026846
0,501	1,503003	-0,0010000	-0,00300267
0,5001	1,500300	-0,0001000	-0,00030003
0,50001	1,500030	-0,0000100	-0,00003000
0,500001	1,500003	-0,0000010	-0,00000300
...	...	...	...

¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5 – f(x) sea menor que 0,001? Explica el por qué

La x debe estar en 0'4999 porque la diferencia entre x y 0'5 es de 0'0001 y la de 1'5 - f(x) es de 0'0002'9997, de ahí hasta 5. Esto por su Izquierda

La x debe estar en ,0'5001, por tanto la f(x) es 1'5003. La diferencia ~~entre~~ de 1'5 - f(x) es de 0'0003 0003. Es menor de una milésima. Si seguimos hasta el infinito tenemos los valores.
La x debe estar en ,0'5001, por tanto la f(x) es 1'5003. La diferencia ~~entre~~ de 1'5 - f(x) es de 0'0003 0003. Es menor de una milésima. Si seguimos hasta el infinito tenemos los valores.
Considerados en valor absoluto

Figura 7. Respuesta de Roberto al problema 2 y 4 del cuestionario

5. Conclusiones

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo está abriendo la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje (Pons, Valls y Llinares, 2011; Boigues, Llinares y Estruch, 2010; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010; Sánchez-matamoros, García y Llinares, 2008). En particular, se hace énfasis en la posibilidad de introducir asistentes digitales en el desarrollo de secuencias de enseñanza que tengan en cuenta las características del proceso de construcción de los significados por parte de los estudiantes (Camacho y Depool, 2003a, b). En este estudio identificamos algunas caracteristicas de la trayectoria de aprendizaje desde la perspectiva teórica de la abstracción reflexiva del concepto de límite en una pareja de estudiantes al realizar una secuencia de tareas que integraban recursos informáticos. El desarrollo de las diferentes tareas mostró que inicialmente el conocimiento de los estudiantes era parcialmente construido (Ron, Dreyfus y Hershkowitz, 2010) en el sentido de la construcción de significado vinculado a contextos específicos. Este hecho se ponía de manifiesto por las dificultades de los estudiantes en coordinar las aproximaciones y las diferencias en el dominio y rango de funciones en el sentido de la aproximación doble intuitiva en diferentes tipos de funciones. Este fue puesto de manifiesto en el caso de las funciones definidas a trozos en las que los estudiantes no fueron capaces de adelantarse a los resultados al asociar el límite con el valor de la función en un punto.

El proceso de construcción del significado del concepto de límite en la pareja de estudiantes mostró que la comprensión inicial del proceso de Aproximación Intuitiva aplicada al dominio y al rango puede ser interpretada como comportamientos que muestran los intentos iniciales de establecer relaciones a partir de la clasificación de los registros de la relación actividad-efecto. Estas relaciones se evidencian al mover los estudiantes el cursor sobre el eje de abscisas y viendo el comportamiento de los valores de la función f(x) en cada caso (tendencias y coordinación). Esta acciones iniciales se pueden considerar parte constituyentes de la fase de participación en la construcción del conocimiento (Simon et al. 2004; Tzur y Simon, 2004). En el caso de la pareja de estudiantes analizada solo cuando tuvieron la posibilidad de usar la conceptualización dinámica de límite en diferentes tipos de funciones podríamos considerar que se iniciaba una coordinación que podía llevar a la construcción del significado del concepto de límite en la fase de anticipación local. Pero esta coordinación solo se dio en algunos casos ya que estaba vinculada a las características de las funciones usadas en las tareas.

La descripción realizada en esta investigación parece indicar que la dificultad de muchos estudiantes en evolucionar hacia una comprensión de la definición del concepto de límite (considerando su significado métrico) puede estar vinculada a la necesaria construcción del significado de cuantificación a partir de la concepción dinámica. En este sentido, este proceso de cuantificación vinculado al desarrollo del significado dinámico parece que podría ser apoyado mediante tareas que tenga por objetivos explícito ayudar a los estudiantes a iniciar la coordinación de las aproximaciones a “x” con las respectivas tendencias de “y” como se propuso en módulo 3 de la secuencia de enseñanza diseñada. En este caso, la construcción de los estudiantes del significado de cuantificación vinculado a la doble aproximación intuitiva posiblemente favorezca la construcción del significado del concepto de límite en la fase de anticipación. En este sentido, las evidencias reunidas parecen apoyar la conjetura de que es el requerimiento de construir un esquema implicando la coordinación de dos procesos junto con la necesidad de un uso sofisticado de la idea de cuantificación el que dificulta el proceso de construcción del significado de límite (Cottrill et al., 1996). En relación al papel de la cuantificación en el proceso de construcción del significado del límite, Swinyard (2011) señala que los dos estudiantes en su estudio pudieron reinventar la definición de límite reflejando la estructura de cuantificación compleja que representa la definición métrica $\varepsilon-\delta$ cuando se implicaban en tareas diseñadas con este propósito. Un aspecto clave en este proceso de construcción fue la manera de usar la notación de valor absoluto para indicar proximidad. Estos resultados sugiere que la habilidad para emplear una aproximación dinámica en el eje de abcisas con una perspectiva de proximidad (métrica) en el eje de ordenadas de manera flexible favorece el desarrollo de una comprensión fuerte del concepto de límite y su definición formal

El proceso de construcción descrito en esta investigación proporciona una descripción fina de la manera en la que dos estudiantes empezaban a coordinar las dos aproximaciones intuitivas que ayudan a constituir el significado del concepto de límite, y de qué manera los estudiantes intentaban compatibilizar el significado métrico del concepto de límite de una función derivada de la definición $\varepsilon-\delta$ con el significado dinámico del concepto. El esquema teórico de las fases de construcción del conocimiento, derivado de una particularización de la idea de la abstracción reflexiva, usado en el análisis del proceso de construcción del significado de la idea de límite en los dos estudiantes analizados ha permitido de manera adicional mostrar cómo el uso de instrumentos tecnológicos pueden hacer más explícito el papel de los modos de representación. En particular, la manera en la que la complementariedad entre lo gráfico, lo numérico y lo algébrico, puesto de manifiesto por el software utilizado, ayudó a desarrollar los procesos de coordinación. De esta manera la descripción del proceso de construcción seguido por los dos estudiantes ha permitido relacionar aspectos de la particularización de la idea de la abstracción reflexiva con reflexiones derivadas del papel de los modos de representación en la construcción del conocimiento.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* (97-140). México: *Grupo* Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., Ortega, T. (2000). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol.* 4(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). El concepto de límite en la educación secundaria. En S. Blázquez y T. Ortega (eds.), *El futuro del cálculo infinitesimal.* (125-157). México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V.

Blázquez, S., Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica S., Benegas J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(2), 189-209

Boigues, F.J., Llinares, S., Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 255-282.

Camacho, A., Aguirre, M. (2001): Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(3), 237-265.

Camacho, M., Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática, 15*(3), 119-140.

Camacho, M., Depool, R. (2003b). Using Derive to understand the concept of definite integral. *International journal for Mathematics Teaching and learning, 5*, 1-16.

Contreras, A., García, M. (2008). La trayectoria instruccional de un proceso de estudio sobre el límite de una función. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, (391-402). SEIEM: Badajoz.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (25-41). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192.

Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and V.Villani (eds.) *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Elia, I., Gagatsssi, A., Panaoura, A., Zachariades, T., Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact of the “didactic contract”. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7, 765-790.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Revista Iberoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11, 113-132.

Fernández, M.B. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(2), 171-187.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Matematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* México CINVESTAV, 2001.

García, M., Llinares, S., Sánchez-Matamoros, G. (2010). Charaterizing Thematized derivative Schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9(5), 1023-1045(23).*

Hardy, N. (2009). Students’ perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies Mathematics* 72, 341–358.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-010-9258-8.

Monagham, J. Sun, S., Tall, D. (1994). Construction of the limit concept whit a computer algebra system. In J. da Ponte y J.F. Matos (eds.), *18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3* (279-286). Lisboa, Portugal.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and mathematics Education, 7*, 431-454.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults.* Tesis doctoral. University of Leed.

Piaget, J., García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Siglo XXI editores. México.

Pons, J., Valls, J., Llinares, S. (2011). Coordination of aproximation in secondary school students' understanding of limit concept. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ankara, Turkey: PME.

Prezenioslo, M. (2004). Images of the Limit of Function Formed in the Course of Mathematical Studies at the University. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103 – 132.

Robinet, J. (1983). Un experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **4**(3), 223-292.

Ron, G., Dreyfus, T., Hershkowitz, R. (2010). Partially correct constructs illuminate students' inconsistent answers. *Educational Studies in Mathematics, 75,* 65–87.

Sánchez-matamoros, G., García, M., Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Simon, M., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Simon, M.A., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Sierra, M. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y C.O.U. sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(1), 71-85.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: the case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(2), 93-114

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.*

Tzur, R. (1999). An Integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (4), 390-416.

Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical concept. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 273-291.

Tzur, R., Simon, M.A. (2004). Distinguishing two stages of mathematical conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 287-304.

Valls, J., Pons, J., Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338

Mauro Mira López. Profesor de Enseñanza secundaria durante mucho tiempo y actualmente está realizando trabajos de investigación en educación matemática**.** mml52@alu.ua.es

Julia Valls González. Catedrática de Escuela Universitaria en la Universidad de Alicante e investigadora en Educación Matemática**.** juliavalls@ua.es

Salvador Llinares Ciscar. Catedrático de Universidad en la Universidad de Alicante e investigador en Educación Matemática. Sllinares@ua.es